Números Reales

La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales recibe el nombre de conjunto de los **números reales,** y se denota con el símbolo:

$$\mathbb{R}$$

El conjunto de los números reales está formado por una serie de subconjuntos de números:

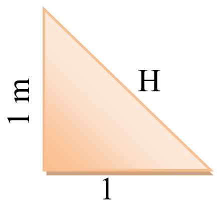
- Los números naturales que surgen con la necesidad de contar $\mathbb{N}$ **= {1, 2, 3, 4,...}**
- Los números enteros que complementan a los naturales pues contienen a los negativos y el cero. $\mathbb{Z}$ = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

- El conjunto de los **Números Racionales** ($\mathbb{Q}$) que corresponden a la unión de todos los números cuya **expresión decimal** es **finita, infinita periódica** o **infinita semiperiódica.** Es decir, el conjunto de los números racionales está compuesto por todos los números que pueden ser escritos como una fracción cuyo numerador y denominador (distinto de cero) son números enteros. $\mathbb{Q}$= {....- ¾, - ½, - ¼ , 0, ¼ , ½, ¾,.....}

- El conjunto de los **Números Irracionales ($\mathbb{I}$)** que está formado por la unión de todos los números que admiten una expresión infinita no periódica.

Números Irracionales

¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo rectángulo?



Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$H^2 = (1m)^2 + (1m)^2$$
$$H = \sqrt{2}m$$

Ahora bien, si utilizamos una calculadora científica para hallar $\sqrt{2}$, obtenemos 1,414213562. Si ese fuese el valor exacto de $\sqrt{2}$, al borrar el visor, volver a ingresar 1,414213562 y elevarlo al cuadrado, debería dar 2. Sin embargo, el valor que se obtiene es 1,999999999. Por lo tanto; $1{,}414213562 \neq \sqrt{2}$, sino que es un valor aproximado de este número.
En Internet pueden obtenerse más cifras decimales de $\sqrt{2}$, por ejemplo:
1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731
Y como puede observarse, en el desarrollo decimal no ocurre que un grupo de cifras se repita una y otra vez, o sea que no es un número periódico, por lo tanto no es racional. ***Es un número irracional***.

Los números irracionales no pueden escribirse como fracción, por lo tanto, no tienen un número finito de cifras decimales ni un período que se repita, o sea los números irracionales tienen **<u>infinitas cifras no periódicas</u>**

Aclaración: no son números decimales, sino que tienen una representación decimal.
Son irracionales todas las raíces de cualquier índice que no den por resultado un entero. También son irracionales todos los números que se obtienen al operar (sumar, restar, multiplicar o dividir) números irracionales con racionales.

⚠ ¡Nota Importante!

✓ No siempre la suma de dos números irracionales es otro número irracional.

Ejemplo: $-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0 \in \mathbb{Q}$

- ✓ No siempre el producto de dos números irracionales es otro número irracional.

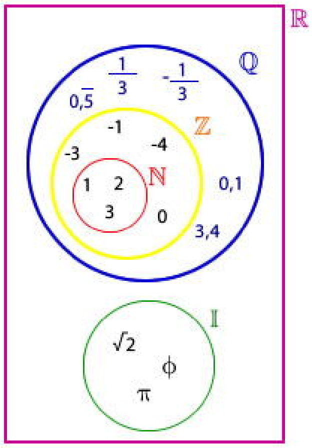
  Ejemplo: $\sqrt{5}.\sqrt{5}=5 \in \mathbb{Q}$

Algunos números están definidos a través de una "ley de formación" que puede deducirse de la observación de los mismos. Por ejemplo:

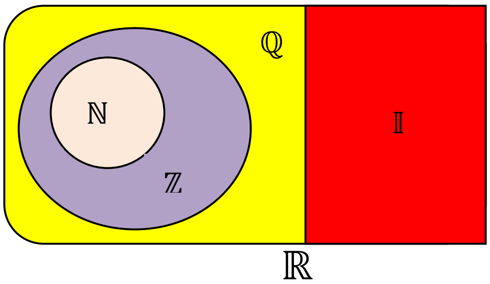
a) 0,12345678910111213………………
b) 3,10110011100011110000……….
c) 2,313233343536373839310311312…………
d) 26,2468101214………………………
e) 15,248163264………………………..

De Lo anterior podemos definir que:

Puesto que los **naturales** están incluidos en los **enteros** y todos los enteros pueden ser representados como un número **racional**, se dice que los números reales son la unión de los números racionales y los irracionales.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

De este modo, podemos hablar de completitud de la recta numérica: cada punto de la recta representa un número real, y todo número real está representado en la recta.

1. *Propiedades de los números reales.*

1.1- Propiedades de la suma:

a) Propiedad Interna:

El resultado de sumar dos números reales es otro número real.

$$\forall\, a, b \in R : a + b \in R$$

Ejemplo:

2 ∈ R, 4/5 ∈ R → 2 + 4/5 = 14/ 5 ∈ R
-2 ∈ R, 23 ∈ R → -2 + 23 = 21 ∈ R

b) Propiedad Asociativa:

Si se tienen más de dos sumandos, da igual cuál de las sumas se efectúe primero. Si a, b y c son tres números reales: **(a + b) +c = a + (b + c)**

Ejemplos: 0.021 + (0.014 + 0.033) = (0.021 + 0.014) + 0.033

c) Propiedad Conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma. **∀ a, b ∈ R : a + b = b + a**

Ejemplos:

3 ∈ R, 4 ∈ R → **3 + 4 = 4 + 3**
√3 ∈ R, 9 ∈ R → **√3 + 9 = 9 + √3**
15,87∈ R, –2.35 ∈ R →15.87 + (–2.35) = –2.35 + 15.87

d) Existencia del elemento neutro aditivo: El 0 (cero) es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número. **∀ a ∈ R, 0 + a = a + 0 = a**

Ejemplos:
0 + 13 = 13 + 0 = 13
8763.218 + 0 = 8763.218
0 + (–56.41) = –56.51

e) **Propiedad del Elemento opuesto o Elemento inverso:**
Todo número real tiene un inverso aditivo, lo que quiere decir que si se suman el número y su inverso, el resultado es 0. **a + (-a) = -a + a = 0 , ∀ a ∈ R**
Ejemplos:
10 + (-10) = 0
2/7 + (-2/7) = 0
87.36 + (–87.36) = 0
–4.13 + 4.13 = 0

1.2- Propiedades de los reales en la resta o sustracción
Al efectuar sustracciones o restas deben considerarse las siguientes reglas de los signos:

a) Si el minuendo y el sustraendo son positivos, **y el minuendo es mayor que el sustraendo**, se efectúa la resta y el resultado es positivo.
Ejemplo: 28.7 – 11.2 = 17.5

b) Si el minuendo y el sustraendo son positivos, y el minuendo es menor que el sustraendo, se efectúa la resta y el resultado es negativo.
Ejemplo: 11.2 – 28.7 = –17.5

c) Si el minuendo es negativo y el sustraendo es positivo, se efectúa la suma de ambos números y al resultado se le pone el signo menos.
Ejemplo: –28.1 – 11.2 = –39.3

d) Restar un número positivo es lo mismo que sumar un número negativo.
Ejemplo: 28.7 – 11.2 = 28.7 + (–11.2) = 17.5

e) Restar un número negativo es lo mismo que sumar un número positivo.
Ejemplo: 28.7 – (–11.2) = 28.7 + 11.2 = 39.3

f) La resta no tiene todas las propiedades de la suma: La resta **no es una operación conmutativa:**
Ejemplo: 52.4 – 31.2 = 21.2, y ese resultado es distinto de 31.2 – 52.4 = –21.2

1.3- Propiedades de la multiplicación. La multiplicación tiene las siguientes propiedades:

a) Propiedad interna:
El producto de los números reales, es un número real. **∀ a, b ∈ R→ a • b ∈ R**

Ejemplos:

$4 \bullet 9 = 36 \in R$
$3/4 \bullet 5/7 = 15/28 \in R$

b) Propiedad asociativa: Esta propiedad dice que cuando se multiplican tres reales dados o más, el resultado es el mismo independientemente de cómo se agrupen y se multipliquen.

$$\text{Si } a, b, c, \in R \rightarrow (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

Ejemplos:
$2 \bullet (3 \bullet 4) = 24 \rightarrow (2 \bullet 3) \bullet 4 = 24$

c) Propiedad conmutativa: De acuerdo con esta propiedad, cuando dos números reales se multiplican en diferentes órdenes, el resultado es siempre el mismo.

$$\text{Si } a, b \in R \rightarrow a \bullet b = b \bullet a$$

Ejemplos:
$3 \bullet (-8) = (-8) \bullet 3$
$(-2 / 3) \bullet (1/4) = (1/4) \bullet (-2 / 3)$

d) Elemento neutro multiplicativo: De acuerdo con esta propiedad de los números reales, el producto de cualquier número real con elemento neutro o de identidad "1" es el mismo número real.

$$a \bullet 1 = a$$

Ejemplos:
$1/2 \bullet 1 = 1/2$
$(-5) \cdot 1 = (-5)$

e) Propiedad distributiva: El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

$$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$$

Ejemplos:
$\pi \bullet (7/3 + 0,5) = \pi \bullet 7/3 + \pi \bullet 0,5$
$(-2) \bullet (3 + 5) = (-2) \bullet 3 + (-2) \bullet 5$

f) Elemento inverso u opuesto. Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad.

$$a \bullet (1/ a) = 1$$

Ejemplos:
$5 (1/5) = 1$
$\pi (1 / \pi)$

g) Factor común. Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.
Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

$$a \bullet b + a \bullet c = a \bullet (b + c)$$

Ejemplos:
$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = (-2) \cdot (3 + 5)$
$\pi \bullet 3/5 + \pi \bullet 0.3 = \pi \bullet (3/5 + 0,3)$

2.4- Propiedades de la división

a- La división no es conmutativa, pues al cambiar el orden de sus términos el resultado también cambia.
Ejemplos:
10 : 2 = 5 pero 2: 10 = 0,2
40:8 = 5 pero 8:40 = 0,2

b- La división No es asociativa: (8 ÷ 4) ÷ 2 = 1 pero 8 ÷ (4 ÷ 2) = 4
c- Cero dividido entre cualquier númeo da cero 0: 4 = 0
d- No se puede dividir por cero 8:0= no existe
e- Las reglas de los signos en el caso de la división son las mismas que para la multiplicación.
f- El cociente no varía si se multiplica o se divide tanto el dividendo como el divisor por el mismo número. (amplificación o simplificación)
g- La adición y la multiplicación de números reales satisfacen las propiedades de **conmutatividad** y **asociatividad;** cada operación tiene un **elemento neutro** y cada número real tiene su **elemento inverso**, tanto aditivo como multiplicativo (excepto el 0, que no tiene inverso multiplicativo).
h- Es un conjunto **denso**, esto es, entre dos números reales siempre hay otro número real.
Los **números racionales**, cuando se escriben como números decimales, son finitos, infinitos periódicos o infinitos semiperiódicos. Sin embargo, los **números irracionales** son siempre números decimales infinitos pero no periódicos. Considerando su representación en la recta numérica, los números reales ocupan la recta numérica por completo, ya que los números irracionales completan todos los espacios dejados por los racionales en la recta numérica.

Radicación.

Raíz n-ésima de un número

Definición:
Dado un número real **a** y un entero positivo **n**, se llama raíz **n-ésima** de **a,** a otro número real **b,** tal que, **b** elevado a **n** es igual a **a.**

En símbolos: $\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a \qquad (n > 0)$

Casos particulares:

- $Si\ n\ es\ par\ y\ a \geq 0 \ \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \ \ y \ \ b \geq 0$
- $Si\ n\ es\ par\ y\ a < 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[n]{a} = \ \nexists \ en \ \Re$
- $Si\ n\ es\ impar\ \ y\ a \in \Re \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \ \ y \ \ b \in \Re$

Propiedades de la Radicación

Lenguaje Formal	*Ejemplos*
1) Exponentes racionales $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad con\ a > 0, \qquad m, n \in \mathbb{N}$	1) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = \sqrt[3]{8^4} = 8^{4/3}$
2) Distributiva en multiplicación y división $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \qquad con\ a, b > 0 \quad n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	2) $\sqrt{4.5} = \sqrt{4}.\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{\dfrac{64}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{4}{2}$
3) Raíz de raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4) Simplificación de radicales • $Si\ n\ es\ par \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \|a\|$ • $Si\ n\ es\ impar \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	4) $Si\ n\ es\ par \quad \sqrt[6]{2^6} = \|2\| = 2$ $\sqrt[6]{(-2)^6} = \|2\| = 2$ $Si\ n\ es\ impar \quad \sqrt[3]{5^3} = 5$ $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
5) Radicales equivalentes: Una raíz enésima positiva no varía si se multiplican o dividen por un mismo número el índice y el exponente del radicando. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n.m]{a^{r.m}} \qquad con\ \ m,r > 0$ $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n:m]{a^{r:m}} \qquad con\ \ m,r > 0\ \ y\ m\ \ es\ divisor\ de\ n\ y\ r$	5) $\sqrt[5]{3^2.a^3} = \sqrt[5.2]{(3^2)^2.(a^3)^2} = \sqrt[10]{3^4.a^6}$ $\sqrt[9]{5^3.a^6} = \sqrt[9:3]{5^{3:3}.a^{6:3}} = \sqrt[3]{5.a^2}$

Extracción de factores fuera del radical

Teniendo en cuenta las propiedades de la radicación, pueden extraerse factores fuera del radical, cuando los factores que figuran en el radicando sean potencias de exponente mayor o igual que el índice de la raíz. En algunos casos es necesario factorear el radicando.

Por ejemplo:

$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2^3}$. Descomponer el ocho en factores primos.

$=$ ___________ . Descomponer el exponente en suma de potencias de igual base.

$=$ ___________ . Distribuir el radical en cada factor, y simplificar índice y exponente.

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$. El factor 2 queda fuera del radical y éste queda reducido a su mínima expresión.

¡Nota Importante!
Cuando aplicamos el procedimiento antes descripto, el número sigue siendo el mismo (por eso se utiliza el signo igual entre las expresiones); lo único que logramos es cambiar el aspecto, o sea la forma de expresarlo. Puede verificarse con la calculadora que:

$$\sqrt[2]{8} = 2.\sqrt{2} \cong 2{,}828427125 \ldots$$

Otros ejemplos:

$\sqrt[8]{81a^{14}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$\sqrt[8]{a^6.b^2.c^{17}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Radicales semejantes

Se llaman radicales semejantes a aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Únicamente pueden diferir sus coeficientes.

Por ejemplo:

$3\sqrt{2} \quad y \quad -5\sqrt{2} \quad son\ radicales\ semejantes;\ 3\ y -5\ son\ los\ coeficientes$

$-4a\sqrt[3]{b^2} \quad y \quad -4\sqrt[3]{b^2} \quad son\ radicales\ semejantes;\ -4a\ \ y -4\ son\ coeficientes\ pero\ \ distintos$

$5\sqrt{a} \quad y \quad 5\sqrt[3]{a} \quad no\ son\ radicales\ semejantes, aunque\ sus\ coeficientes\ son\ iguales$

OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

Adición y sustracción (Suma algebraica)

La suma algebraica de números irracionales semejantes, es otro irracional semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de cada uno de ellos.

Ejemplos:

a) $$\underbrace{3\sqrt{2}+\frac{5}{4}\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-4\sqrt{2}}_{\text{En los cinco términos los radicales son semejantes.}}=\underbrace{\left(3+\frac{5}{4}-1+\frac{1}{2}-4\right)}_{\text{Suma algebraica de coeficientes.}}\sqrt{2}=-\frac{1}{4}\sqrt{2}$$

b) $2\sqrt[3]{81}-4\sqrt[3]{24}=$

= ______________________

= ______________________

= ______________________

= ______________________

= ______________ = _______

- *Los radicales no son semejantes aparentemente.*
- *Factorear los radicandos.*
- *Descomponer los exponentes en sumas para poder extraer factores del radical.*
- *Distribuir los radicales en el producto y simplificar índice y exponente.*
- *Multiplicar los coeficientes.*
- *Como los radicales ya se transformaron en semejantes puedo operar con los coeficientes.*

c) $\sqrt{2}+2\sqrt[4]{36}-\sqrt{8}+\sqrt{54}=$

= ____________________________________

= ____________________________________

= ____________________________________

= ____________________________________

= ____________________________________

= ____________________________________

- *Los radicales no son semejantes aparentemente.*
- *Factorear los radicandos.*
- *Distribuir y simplificar.*
- *Se asocian los radicales que no se simplificaron totalmente, porque son de igual índice.*
- *Los radicales no son todos semejantes.*
- *Agrupo los que son semejantes y opero con sus coeficientes*
- *La adición de radicales no semejantes queda indicada.*

Multiplicación de números irracionales

✓ *Multiplicación de radicales de igual índice.*

> *El producto de números irracionales de igual índice es otro irracional cuyo índice es el mismo y cuyo radicando es el producto de los radicandos de cada uno de ellos.*

Ejemplos:

$$a)\ \sqrt[5]{500}.\sqrt[5]{50} = \underbrace{\sqrt[5]{\qquad .\quad}.\sqrt[5]{\qquad .\quad}}_{\text{Factorear}} = \underbrace{\sqrt[5]{\qquad\quad .\quad}}_{\text{Inversa de propiedad distributiva}} = \underbrace{\sqrt[5]{\qquad}}_{\text{Suma de exponentes de potencias de igual base}} = \underbrace{\sqrt[5]{\quad}.\sqrt[5]{\quad}}_{\text{Extraer factores del radical, si es posible}} = 5.\sqrt[5]{8}$$

RECORDAR PROPIEDAD 2 y 4 DE LA RADICACIÓN. PÁGINA 5

$$b)\ \sqrt[8]{81a^5}.\sqrt[8]{40b^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$$
$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 6a\sqrt[8]{5a^2b^2}$$

$$c)\ \left(-7+\sqrt{2}\right).\left(3-5\sqrt{2}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$$
$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = -31+38\sqrt{2}$$

Producto Notable: Suma por Diferencia

$$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$$

$$d)\ \left(5+\sqrt{3}\right).\left(5-\sqrt{3}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$= \_\_\_\_\_$$

✓ *Multiplicación de radicales de distinto índice.*

> *El producto de números irracionales de distintos índices es otro irracional equivalente, cuyo índice es el múltiplo común menor (m.c.m) entre los dados; y el radicando es el resultado de aplicar la equivalencia.*

Ejemplos:

$a)\ \frac{1}{2}\sqrt{3x^4}\,.\frac{2}{3}\sqrt[5]{9x} =$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

- Multiplicar los coeficientes y factorear los radicandos.
- Determinar el índice común menor.
- Aplicar la propiedad 5) de radicales semejantes.
- Quedan transformados en radicales de igual índice. Luego opero como en el caso anterior.

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = x^2\sqrt[6]{3x^2}$

Potencias de exponente racional

Las raíces guardan una estrecha relación con las potencias de exponente racional no entero.
Recordamos la propiedad 1 de la radicación:
Exponentes racionales

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad con\ a > 0, \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

Todo radical puede convertirse en una potencia de exponente fraccionario, y de esa manera podemos aplicar todas las propiedades de la potenciación.

Por ejemplo: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2^{3/2}$

$(3)^{4/7} = \sqrt[7]{3^4}$

$a)\ \sqrt{5} =$ $\qquad b)\ \sqrt[3]{7^2} =$ $\qquad c)\ \sqrt[5]{16} =$ $\qquad d)\ \sqrt[3]{32x^3} =$

Para realizar estas transformaciones, debes tener en cuenta que las potencias tengan la misma base y que los ordenadores, como paréntesis, corchetes y llaves te indican el alcance de cada operación. No existe un orden estricto, por cuál propiedad comenzar. Por ejemplo:

$a)\ \sqrt[3]{3.\left(3.\sqrt[5]{3}\right)^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= 3\sqrt[15]{3^2}$

$b)\ 5.\sqrt[3]{5} : \sqrt{\left(\frac{1}{5}.\sqrt[5]{25}\right)^{-1/3}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 5\sqrt[30]{5^7}$

División en $\mathbb{R}$ - Racionalización de Denominadores.

Antes de abordar el tema de racionalización, vamos a recordar una propiedad de la división entre números racionales.

> "Si en una división se multiplican el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no se altera"

Por ejemplo: $\frac{100}{20} = 5$

$\frac{100\,.\,4}{20\,.\,4} = \frac{400}{80} = 5$

Esta estrategia es la que usaremos para resolver la división por un número irracional.

Para resolver el problema de la división por un número ***irracional*** o una expresión algebraica irracional basta transformar el divisor o denominador ***irracional*** en un número ***racional***. Esta operación se conoce con el nombre de ***racionalización de denominador.***
Pueden presentarse tres casos.

- *PRIMER CASO:* *<u>El denominador irracional es una raíz cuadrada</u>*

  En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, el mismo número irracional que figura en el divisor.

$$a)\quad \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}_{\text{Agregado}} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}}_{\text{El radicando queda elevado al cuadrado y se simplifica con la raíz}} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$b)\quad \frac{2}{\sqrt{27}} = \frac{2}{\sqrt{3^3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3.3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$c)\quad \frac{2a^2}{\sqrt{243a}} = \underbrace{\frac{2a^2}{\sqrt{3^5a}}}_{\text{Factorear y Extraer factores}} = \underbrace{\frac{2a^2}{9\sqrt{3a}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}}}}_{\text{Agregado}} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad}}_{\text{Denominador Racional}}$$

- *SEGUNDO CASO:* *<u>El denominador irracional es una raíz de otro índice distinto de dos.</u>*

  En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, una raíz de igual índice a la dada en el divisor, pero en el radicando de dicha raíz se agrega el factor conveniente de manera que se complemente para lograr igualar al índice.

$$a)\quad \frac{1}{\sqrt[5]{45x^4y^3}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[5]{3^2.5.x^4.y^3}}}_{\text{Factorear}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[5]{3^3.5^4.x.y^2}}{\sqrt[5]{3^3.5^4.x.y^2}}}}_{\text{Agrego raíz de igual índice; y los mismos factores con el exponente necesario para llegar a igualar el índice.}} = \underbrace{\frac{\sqrt[5]{\qquad\qquad}}{\sqrt[5]{\qquad\qquad\qquad}}}_{\text{Producto de radicales de igual índice: se introducen todos los factores en un radical.}} = \underbrace{\underline{\qquad\qquad}}_{\text{Se simplifican todos los factores.}} = \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Expresión algebraica racional.}}$$

$$b)\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[8]{48}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[8]{2^4.3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[8]{2.3}}\cdot\boxed{\underline{\qquad\qquad}} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

- *TERCER CASO:* *<u>El denominador irracional es un binomio, en el que uno o ambos términos son números irracionales.</u>*

En este caso se agrega multiplicando, al numerador y denominador, el conjugado del divisor; o sea, los mismos números pero cambiado de signo el segundo término.

$$b)\ \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\boxed{\frac{\quad}{\quad}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = 2\sqrt{3}-3$$

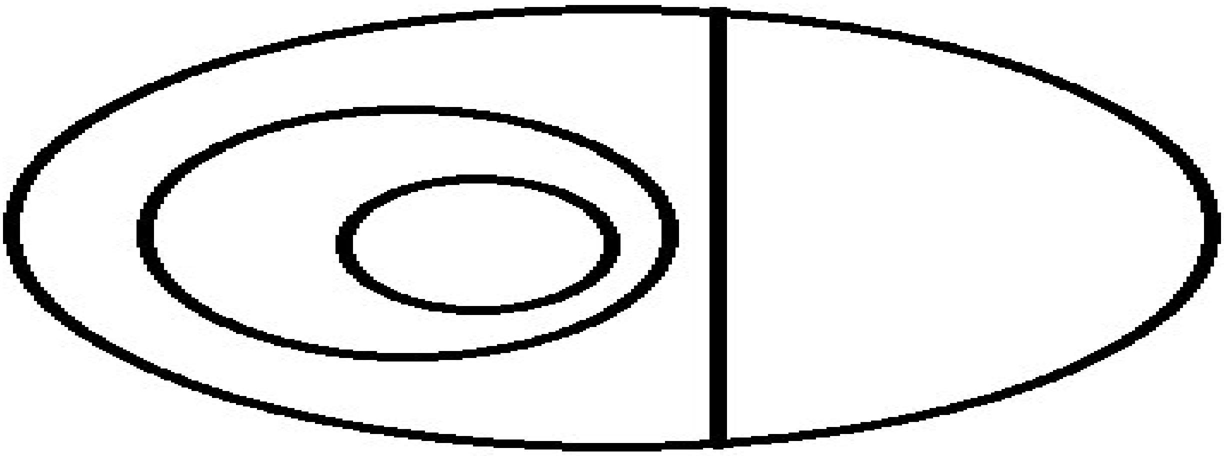
$$a)\ \frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \sqrt{3}$$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1
NÚMEROS REALES. IRRACIONALES

1) Completar los espacios con $\in$ o $\notin$ según corresponda y agrega los números a los conjuntos correspondientes:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
4^{-1}					
$\sqrt[3]{-125}$					
$(-1)^6$					
3π					
$(-\sqrt{3})^2$					
0					
$1+\sqrt{5}$					
e^2					
5.10^{-3}					
0,2565656…					
$\sqrt[4]{64}$					
$\sqrt{-4}$					
- 5					
$\frac{3}{2}$					
2,93					
0,0102030405…					
$\frac{10}{5}$					
$\sqrt[3]{-27}$					
7 - 12					
$\sqrt{8}$					



Descubrir la regla de formación de los siguientes números irracionales y luego escribe los seis números siguientes:

a) 1,33343536 …
b) 0,808800888000 …
c) 321, 612244896 …

2) Decidir si las siguientes afirmaciones son V o F; en caso de falsedad exhiban un contraejemplo:

1. La unión del conjunto de los números enteros con el de los racionales forman el conjunto de los números reales.
2. Todo número real es racional.
3. Todo número racional es entero.
4. Todo número irracional es real.
5. Existen números reales que al elevarlos al cuadrado dan negativos.
6. Existen “huecos” en la recta numérica que no son ocupados por ningún número real.
7. Si a y b son números reales, entonces a es mayor que b o b es mayor que a.
8. Todo número natural es real.
9. Siempre consigo un resultado al calcular la raíz cuadrada de un número real.
10. La suma de un racional con un irracional es un número racional.
11. La multiplicación entre dos números irracionales puede dar un número racional.

3) Calcular aplicando las propiedades correspondientes.

a) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{10}.\,\sqrt{5} =$

b) $\sqrt{125} : \sqrt{5} =$

c) $\sqrt[4]{3^6} =$

d) $\sqrt{90} : \left(\sqrt{2}.\sqrt{5}\right) =$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} =$

f) $\sqrt[3]{2}.\left(\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}\right) =$

g) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{a^{12}}}} =$

h) $\left(\sqrt{12}.\sqrt{6}\right) : \sqrt{2} =$

4) Simplificar al máximo cada expresión, extrayendo factores del radical:

a) $\sqrt{27}$
b) $\sqrt{45}$
c) $\sqrt{252}$
d) $\sqrt[3]{32}$
e) $\sqrt{684}$
f) $\sqrt[4]{243}$

g) $\sqrt{8x^6a^3}$
H) $\sqrt[3]{8a^3x^4}$
i) $\sqrt{200a^5b^7m^6}$
j) $\sqrt[4]{10000a^8b^8y^3}$
k) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}x^{10}y^{12}z^6}$

5) Realizar las siguientes sumas algebraicas entre radicales:

a) $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}=$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}-\sqrt{675}-\sqrt{12}$

c) $\sqrt{175}-\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}=$

d) $\frac{2}{9}\sqrt{20}-\sqrt{45}-\frac{3}{7}\sqrt{125}-\sqrt{98}=$

e) $7\sqrt{450}-\sqrt{320}-\frac{14}{3}\sqrt{80}-\frac{2}{5}\sqrt{800}=$

f) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}+\frac{3}{28}\sqrt[3]{16}=$

g) $\sqrt[3]{875}-\frac{1}{7}\sqrt[3]{448}+\frac{35}{8}\sqrt[3]{189}=$

h) $\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{135}+\frac{\sqrt[3]{5}}{2}=$

6) Resolver aplicando propiedad distributiva:

a) $(\sqrt{5}+2).(\sqrt{5}+2)=$

b) $(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}).(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})=$

c) $(\sqrt{7}-4)^2=$

d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=$

7) Resolver las operaciones indicadas, trabajando los radicales hasta su mínima expresión

a) $\sqrt{2}.\sqrt{8}=$

b) $\sqrt{ab}.\sqrt{a}=$

c) $\sqrt{ab^3}.\sqrt{ab}=$

d) $\sqrt[4]{20}.\sqrt{10}.\sqrt[3]{200}=$

e) $\sqrt[4]{8}.\sqrt[3]{32}.\sqrt[3]{16}.\sqrt[5]{81}=$

f) $(6\sqrt{5}-3\sqrt{10})^2=$

g) $\sqrt[3]{9}.\sqrt[4]{32}.\sqrt[3]{16}.\sqrt[4]{9}=$

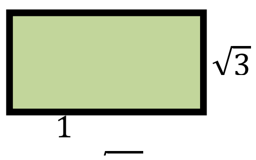
h) $(2\sqrt{5}+4\sqrt{8})^2=$

i) $(\sqrt{5}-\sqrt{3}).(\sqrt{5}+\sqrt{3})=$

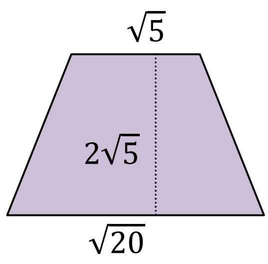
j) $(\sqrt{12}-2\sqrt{6})^2=$

8) Hallar el valor exacto del perímetro y el área (en cm) de las siguientes figuras.

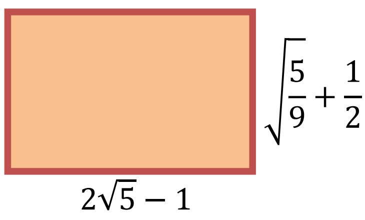
a)



b) Isósceles

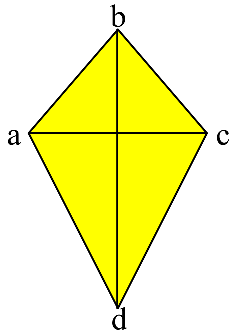


c)

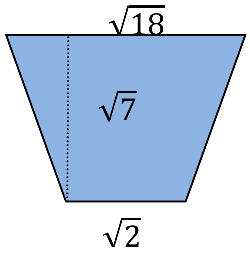


d) Romboide

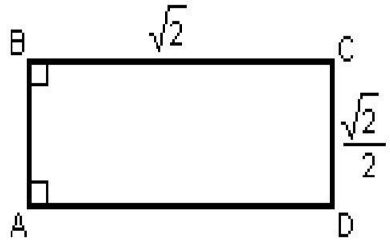
$$\begin{cases} \overline{ac} = \sqrt{5} \\ \overline{bd} = \sqrt{45} \\ \overline{ab} = \frac{5}{2} \end{cases}$$



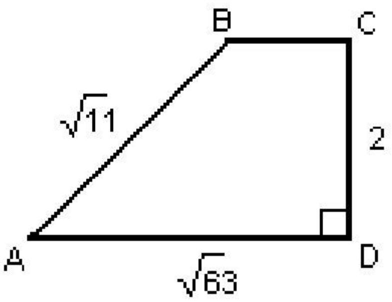
e) Isósceles



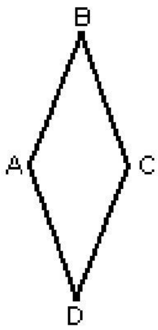
f)



g)

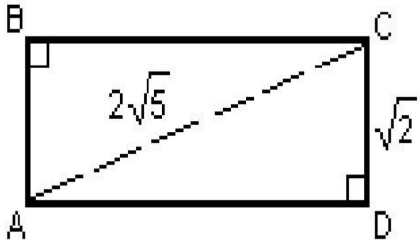


h)



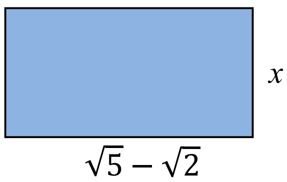
$\overline{AC}=2$
$\overline{BD}=6$

i)

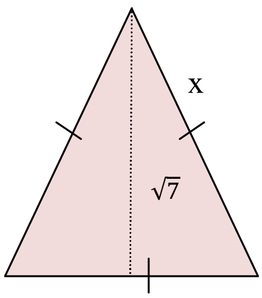


9) El área de estas figuras es igual a 1 cm^2. Hallar el valor de la incógnita y expresar los resultados sin radicales en el denominador.

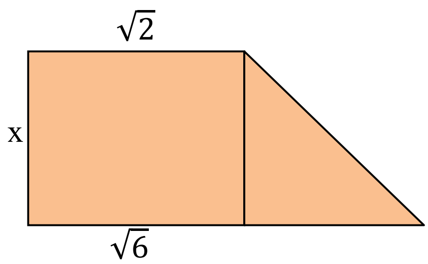
a)



b) equilátero



c)



10) Realizar las siguientes operaciones aplicando propiedades.

a) $\dfrac{3^{1/2} : 3}{(3^2)^{-1/2}} =$

d) $\left\{\dfrac{[(-2)^3]^2}{3}\right\}^{-1} =$

g) $\left(2^{1/2}\right)^{3/2} . \left(\sqrt{2^5}\right)^{-2} =$

b) $\dfrac{8 : 2^4}{16 . 2^5} =$

e) $\left[\left(2^{4/9}\right)^{1/2}\right]^{-3} : [(2^{-1})^2]^{-1/3} =$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 . \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} . \left(\dfrac{3}{2}\right) =$

f) $\sqrt[3]{\left[\sqrt{\dfrac{1}{5}} . 5^{3/2} . \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1/3}\right]^{-2}} =$

11) Racionalizar los denominadores

$a)\ \frac{2}{\sqrt{7}}=$

$b)\ \frac{1}{\sqrt{3}}=$

$c)\ \frac{5}{\sqrt{15}}=$

$d)\ \frac{12}{\sqrt{6}}=$

$e)\ \frac{3}{2\sqrt{5}}=$

$f)\ \frac{2}{4\sqrt{8}}=$

$g)\ \frac{2a}{\sqrt{3ax}}=$

$h)\ \frac{5b}{\sqrt{7b}}=$

$i)\ \frac{2ab}{\sqrt{8ab}}=$

$j)\ \frac{2}{\sqrt[3]{5}}=$

$k)\ \frac{3}{\sqrt[3]{16}}=$

$l)\ \frac{2}{\sqrt[6]{16}}=$

$m)\ \frac{5}{\sqrt[3]{4}}=$

$n)\ \frac{8}{\sqrt[5]{16}}=$

$o)\ \frac{6}{\sqrt[5]{2}}=$

$p)\ \frac{9}{\sqrt[3]{9a}}=$

$q)\ \frac{3}{\sqrt[6]{a^5.b^6.c^2}}=$

$r)\ \frac{3n}{\sqrt[3]{n^2m}}=$

$s)\ \frac{2}{\sqrt{3}-11}=$

$t)\ \frac{5}{\sqrt{2}+3}=$

$u)\ \frac{3}{4-\sqrt{2}}=$

$v)\ \frac{2}{1-\sqrt{7}}=$

$w)\ \frac{-5}{\sqrt{5}+1}=$

$x)\ \frac{6}{2-\sqrt{3}}=$

$y)\ \frac{10}{\sqrt{2}+5}=$

$z)\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=$

12) Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ \sqrt{3x-1}=2$

$b)\ x^2-\sqrt{3}x=0$

$c)\ (3x-1)^2=6$

$d)\ \left(x+2\sqrt{10}\right)\left(x-\sqrt{40}\right)=\sqrt[5]{3^6}$

$e)\ x-\frac{1}{3}\sqrt{2}=\frac{3}{\sqrt{2}+1}-\frac{2}{1-\sqrt{2}}$

$f)\ \frac{x}{\sqrt{24}}+\frac{1}{5}(\sqrt{6}-2)=\frac{-3}{1+\sqrt{6}}$